

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο

1. Να βρείτε τις τιμές των λ, μ, ν , ώστε τα μονώνυμα:

- i. $3x^\nu y^3$, $-x^2 y^{2\mu-5}$, να είναι όμοια.
- ii. $\lambda\alpha^2\beta^3$, $5\alpha^2\beta^{\mu+1}$, να είναι ίσα.
- iii. $(2\lambda-1)x^3 y^4$, $\lambda x^\mu y^4$, να είναι αντίθετα.

2. Να κάνετε τις πράξεις:

- i. $2\alpha^2\beta - \alpha^2\beta$
- ii. $5x^3 - 3x^3 + 2x^3$
- iii. $2x^3 y \cdot (-5x^2 y^3)$
- iv. $-\frac{2}{3}x^5 : (-x^6)$
- v. $(-\sqrt{2}x^3)^2$

3. Να κάνετε τις πράξεις:

- i. $3x + (-2x + 3)$
- ii. $3x^2 - x + 2 - (x^3 - x^2 - x + 1)$
- iii. $1 - 2x^2(3x - 1) - (5x - 2) \cdot (-x)$
- iv. $xy^2 \cdot (2x^2 y - 3y)$
- v. $(3x - 2) \cdot (2x^2 - x + 4)$
- vi. $(x^2 - 2y) \cdot (3xy - x)$

4. Αν $P(x) = 2x^2 - x - 1$ και $Q(x) = 3x - 2$, να βρείτε τα πολυώνυμα:

- i. $P(x) \cdot Q(x)$
- ii. $P(x) \cdot [Q(x) - 3x(x+1)]$
- iii. $[P(x) - 1] \cdot [Q(x) - x]$

5. Αν $P(x) = 3x - 2$, να βρείτε τα πολυώνυμα:

- i. $Q(x) = P(2x+1)$
- ii. $R(x) = P(x^2 - 3)$
- iii. $H(x) = P(P(x))$

6. Να κάνετε τις πράξεις:

- i. $(x+3)^2$
- ii. $(2x-3)^2$
- iii. $(x+2)^3$
- iv. $(x^2-5)^3$
- v. $(x+5) \cdot (x-5)$
- vi. $(x-2) \cdot (x+2) \cdot (x^2+4)$

7. Να κάνετε τις πράξεις:

- i. $6y^2 + 2y(3y+1) \cdot (1-3y)$
- ii. $(x+2) \cdot (x^2 - 2x + 4)$
- iii. $1 - 2x(x-3) - (3x-2)^2$
- iv. $3x - (x-2) \cdot (3x-1) - (x+5)^3$

8. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

- i. $-x^2 y + xy^2 - xy$
- ii. $x^3 - 2x^2 + 2x - 4$
- iii. $16\alpha^2 - 49$
- iv. $x^3 - x$
- v. $x^3 - 8$
- vi. $x^2 + 6x + 9$
- vii. $y^2 - 10y + 25$
- viii. $25x^2 + 4y^2 - 20xy$
- ix. $2x^2 - 12x + 18$
- x. $9 - \alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2$

9. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

- i. $5x^2 + 7xy + 2y^2$
- ii. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
- iii. $x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y + 1$
- iv. $(x^2 + 6x + 7) \cdot (x^2 + 6x + 13) + 9$

10. Για ποιες τιμές του x ορίζονται οι παρακάτω παραστάσεις:

$$\alpha) \frac{x^2}{x^2-16} \quad \beta) \frac{x+2}{x^2+2x} \quad \gamma) \frac{2x+3}{x^2+5x+6} \quad \delta) \frac{x^2+1}{x^3+4x^2+3x}$$

11. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$$\alpha) \frac{x^2-4}{x^4-16} \quad \beta) \frac{x^2+5x+6}{x^2+2x} \quad \gamma) \frac{x^3+4x^2+3x}{x^2+x-6} \quad \delta) \frac{x^3+1}{x^2-x+1}$$

12. Να γίνουν οι πράξεις:

$$\alpha) \frac{1}{x^2-3x+2} + \frac{3}{x^2+x-2} + \frac{1}{x^2-4} \quad \beta) \frac{x+y}{y} - \frac{x-y}{x} - \frac{4xy}{x^2+y^2}$$

13. Να γίνουν οι πράξεις:

$$\alpha) \frac{x^2-x}{x^2+4x+4} \cdot \frac{x^2+3x+2}{2-x} \cdot \frac{x^2-4}{x^2-1} \quad \beta) \frac{x^2+x}{x^2-4} \cdot \frac{x^2+5x+6}{x^2-1} \cdot \frac{x-2}{x^2-9}$$

14. Να γίνουν οι πράξεις:

$$\alpha) \frac{x^2-10x+25}{x^3+1} : \frac{x^2-25}{x^2+x} \quad \beta) \frac{x^2-9}{x^2-4} : \frac{x^2-6x+9}{x^2+2x}$$

15. Να γίνουν οι πράξεις:

$$\alpha) \frac{x^2-4}{x-3} \cdot \frac{x^2-6x+9}{x^3-8} : \frac{x^2-x-6}{x^2+x} \quad \beta) \frac{x^2+x-12}{x^2+x-30} \cdot \frac{x^2+5x-6}{x^2-2x-3} : \frac{x+3}{x^2+7x+6}$$

16. Να γίνουν οι πράξεις:

$$\alpha) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{xy} \right) : (x^3 - y^3) \quad \beta) \left(\frac{x^2+y^2}{y} - x \right) \cdot \frac{x^2-y^2}{x^3+y^3} : \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right)$$

17. Να γίνουν οι πράξεις:

$$\alpha) \frac{1}{(x+y)^2} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) + \frac{1}{(x+y)^3} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \quad \beta) \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) \frac{x^4-x^3}{x^4-1}$$

18. Να απλοποιηθούν οι σύνθετες κλασματικές παραστάσεις:

$$\alpha) \frac{\frac{x^2+y^2}{xy} - 2}{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}} \quad \beta) \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{xy^3}}{y-1 + \frac{1}{y}} \quad \gamma) 1 - \frac{1}{y - \frac{1}{y-2}}$$

19. Να γίνουν οι πράξεις:

$$\left(1 + \frac{x}{y} \right) : \left(1 - \frac{x^2}{y^2} \right) + \left(1 + \frac{y}{x} \right) : \left(1 - \frac{2y}{x} + \frac{y^2}{x^2} \right)$$

20. Να γίνουν οι πράξεις:

$$\left(1 - \frac{2xy}{x^2+y^2} \right) \cdot \left(\frac{x}{y} - \frac{2x-y}{x+2y} \right) \cdot \left(\frac{2xy}{x-y} - y \right) \cdot \left(\frac{x}{y} - \frac{2x}{x+y} \right)$$

21. Να γίνουν οι πράξεις:

$$\left[1 - \frac{1-(x^2+y^2)}{2xy} \right] : \frac{1-(x+y)^{-1}}{1+(x+y)^{-1}}$$

22. Να γίνουν οι πράξεις:

$$\alpha) \frac{\frac{1}{x} - 1}{1 - \frac{1}{x^2}} : \frac{1 - \frac{1}{x}}{x+1} \quad \beta) \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}} : \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $6x^2 - x - 1 = 0$

ii. $5x^2 + x - 4 = 0$

iii. $1 + 2(x-1) = x - 3(2x+1)$

iv. $2x^3 - x^2 - 8x + 4 = 0$

v. $(2x-1)^2 - x(x-1) = 3 + x^2$

vi. $8(x-1)^2 = 18(3x-5)^2$

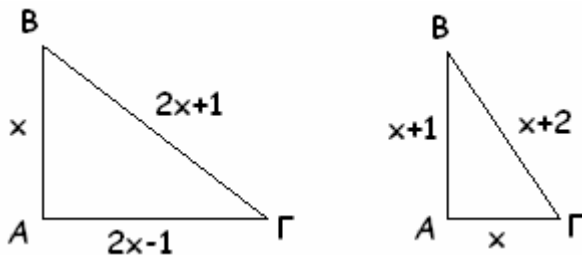
vii. $7x^2 - (3x-1)^2 = x + 2$

viii. $x^2 - \frac{2x-1}{6} = x - \frac{x^2}{3}$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις: $2x^2 - 5x + 3 = 0$ και $4x^2 - 20x + 25 = 0$.

Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα: $2x^2 - 5x + 3$ και $4x^2 - 20x + 25$.

3. Να υπολογίσετε τις πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ:



4. Να βρείτε δύο διαδοχικούς άρτιους ακεραίους, που το άθροισμα των τετραγώνων τους να είναι 100.

5. Να βρείτε δύο περιττούς, που η διαφορά των κύβων τους είναι 26.

6. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $\frac{y+3}{y-3} - \frac{1}{y} = \frac{1}{y^2-3y}$

ii. $1 - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2-x} = \frac{2x}{x^2-4}$

7. Αν $\alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι:

i. $2\alpha - 1 < 2\beta - 1$

ii. $1 - 3\alpha > 1 - 3\beta$

8. Αν $-1 < x < 2$ και $0 < y < 1$, να αποδείξετε ότι:

i. $-1 < x + y < 3$

iii. $-2 < x - y < 2$

ii. $-3 < 3x + y < 7$

iv. $-2 < x - 2y + 1 < 3$

9. Αν $x > 3$ και $y > 2$, να αποδείξετε ότι:

i. $x \cdot y > 6$

ii. $(x-3) \cdot (y-2) > 0$

iii. $(x-2)y > 2$

iv. $(x-1)(y+1) > 6$

10. Να αποδείξετε ότι:

i. Αν $x > 0$, τότε $x < 2x$

ii. Αν $x > 0$, τότε $x > 2x$

iii. Αν $x > 1$, τότε $x^2 > x$

iv. Αν $0 < x < 1$, τότε $x^2 < x$

11. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y , να αποδείξετε ότι:

i. $x^2 + 9 \geq 6x$

ii. $(x-y)^2 \geq -4xy$

iii. $x^2 + y^2 + 4 \geq 4x$

12. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και στη συνέχεια να παραστήσετε τις λύσεις κάθε ανίσωσης στην ευθεία των αριθμών:

i. $x + 2(5x-3) < 1 - 3(2x-1)$

ii. $1 - 5(2x-3) \geq -3(x+4) - (x-2)$

$$\text{iii. } 3x - 2[-1 + (2x - 3) \cdot 2] \leq x - 1$$

$$\text{iv. } \frac{3x - (4x - 1)}{3} > -x$$

$$\text{v. } \frac{2x - 1}{3} - \frac{3x - 2}{2} > \frac{x}{6} - 1$$

$$\text{vi. } \frac{\omega - 3}{2} - \frac{2\omega - 1}{4} \leq \omega - 1$$

$$\text{vii. } y + 1 - \frac{1 - 2y}{10} - \frac{y}{5} < 0$$

$$\text{viii. } \frac{x}{2} - x - \frac{3x + 1}{5} \leq 1 - \frac{2x - 5}{3}$$

13. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$$\text{i. } 3x - 2(x - 1) > 1 - (x - 1) \text{ και } 1 - 3 \cdot (-2x) \leq x - (-9x + 2)$$

$$\text{ii. } 2 - [x - 3(-x + 1)] > x \text{ και } 3x - 2[x - (3x - 2)] \leq 8x$$

$$\text{iii. } 1 - \frac{3(x - 1)}{2} < x - \frac{5}{2} \cdot \frac{x - 2}{3} \text{ και } \frac{1 - [x - 2(x - 1)]}{2} > \frac{2}{3}(x - 1)$$

$$\text{iv. } 1 - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{x}{5} - \frac{3(x - 1)}{2} \right) > 0 \text{ και } \frac{2x - 1}{2} > \frac{3x - 2}{3}$$

14. Να λύσετε και να παραστήσετε στην ευθεία των αριθμών τις λύσεις των ανισώσεων:

$$\text{i. } 1 \leq 2x - 1 < 3$$

$$\text{ii. } -3 < 3x + 2 \leq 0$$

$$\text{iii. } 0 \leq 1 - 3x < 2$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο

1. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i. } \begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$$

$$\text{iv. } \begin{cases} 4|x| - 2|\psi| = 11 \\ 6|x| - 5|\psi| = 15,5 \end{cases}$$

$$\text{ii. } \begin{cases} 2x - 5y = 2 \\ 4x + 3y = 4 \end{cases}$$

$$\text{iii. } \begin{cases} x - 2(x - y + 1) = 3y - 1 \\ 11 + 3(x - 1) = x - 2(y - 3) \end{cases}$$

2. Αν το σύστημα $\begin{cases} 2\alpha x - \beta y = -1 \\ \beta x - \alpha y = 1 \end{cases}$ έχει λύση την $x = -1$ και $y = 1$, να βρείτε τους αριθμούς α, β .

3. Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το σύστημα :

$$\begin{cases} \lambda^2 x + 3\psi = 6 \\ 3x + \psi = 2\mu \end{cases}$$

έχει άπειρες λύσεις και στη συνέχεια να βρείτε την μορφή των άπειρων αυτών λύσεων.

4. Ένα κινητό σημείο κινείται πάνω στην ευθεία $\psi = 2$. Ένα δεύτερο σημείο κινείται ευθύγραμμα από το $M(3, 0)$ προς το $(0, 0)$. Να βρείτε (αν υπάρχει) το κοινό σημείο της διαδρομής τους και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας με δύο τρόπους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο

1. Να βρείτε την τιμή του α , ώστε η παραβολή $y = \frac{3\alpha-1}{2}x^2$ να διέρχεται από το σημείο $M\left(-\frac{2}{3}, \alpha\right)$.
2. Αν η συνάρτηση $y = \frac{1}{\alpha+1}x^2$ παίρνει ελάχιστη τιμή και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(-1, \alpha+1)$, να βρείτε την τιμή του α .
3. Να βρείτε την τιμή του α , ώστε οι εξισώσεις $y = (\alpha-1)x^2$ και $y = (\alpha^2-1)x^2$, να παριστάνουν παραβολές συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$.