

(Αλγεβρικές Παραστάσεις)

- 1) Να κάνετε τις πράξεις :
- A)  $15xy^2 - 8y^2x$ ,  
 B)  $3xy + 2x^3 - 4xy + y^3 + 3x^3 - 2y^3$   
 Γ)  $25xyz^2 - 14z^2xy - 10yz^2x$
- 2) Να υπολογίσετε τα γινόμενα :
- A)  $-\frac{1}{2}x^3y \cdot 10xy^2$ ,  
 B)  $4xy^2z^3 \cdot \frac{3}{2}x^3y^4z^2$   
 Γ)  $(-3xy^2) \cdot (-\frac{4}{5}x^3y^2) \cdot (-5xy)$
- 3) Να υπολογίσετε τα πηλίκα :
- A)  $15x^4y^2 : 5x^3y$ ,  
 B)  $28x^5y^4z^3 : 7x^4y^3z^2$   
 Γ)  $-16x^8y^6 : 8xy$
- 4) Να κάνετε τις πράξεις :
- A)  $-\alpha(3\alpha - 2\beta - 5) + (3\alpha + \beta)(\alpha - \beta) + \beta^2 - 5(\alpha - 1)$   
 B)  $(3\mu - 2\nu)(3\nu - 2\mu) - 6(\mu + \nu)(\mu + \nu) - \nu\mu + 15$   
 Γ)  $(\alpha - 2\beta)(\alpha + \beta) - (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) + \beta(\beta + \alpha)$
- 5) Να κάνετε τις πράξεις :
- A)  $(x+2)(x+3) - x(x+5) - 5$   
 B)  $(x-1)(x+4) + 6 - x(x+3)$   
 Γ)  $(x+2) - x(x+1) + (x-1)(x+1)$
- 6) Να αποδείξετε ότι :
- A)  $(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (\alpha - \beta)^2$   
 B)  $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$   
 Γ)  $2\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\beta\gamma - 2\alpha\gamma = (\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2$
- 7) Με τη βοήθεια της ταυτότητας  $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$  να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:
- A)  $200^2 - 190^2 =$   
 B)  $111^2 - 11^2 =$   
 Γ)  $47^2 - 43^2 =$   
 Δ)  $7,55^2 - 2,45^2 =$

- 8) Α) Να αποδείξετε ότι  $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$ .  
 Β) Αν για τους αριθμούς  $\alpha$ ,  $\beta$  γνωρίζουμε ότι:  $\alpha + \beta = \sqrt{5}$  και  $\alpha - \beta = \sqrt{3}$  να δείξετε ότι  $\alpha\beta = \frac{1}{2}$  και να υπολογίσετε το άθροισμα τετραγώνων των  $\alpha$ ,  $\beta$ .
- 9) Έστω  $a = \sqrt{5} - \sqrt{3}$  και  $\beta = \sqrt{5} + \sqrt{3}$   
 Α) Να υπολογίσετε το άθροισμα και το γινόμενο των  $\alpha$ ,  $\beta$ .  
 Β) Με τη βοήθεια της ταυτότητας  $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$ , να υπολογίσετε το άθροισμα τετραγώνων των  $\alpha$ ,  $\beta$ .  
 Γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα των κύβων των  $\alpha$ ,  $\beta$ .
- 10) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:  
 $\alpha\beta(\beta - \alpha) + \beta\gamma(\gamma - \beta) + \gamma\alpha(\alpha - \gamma)$
- 11) Α) Να δείξετε ότι  $\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + 2\alpha^2\beta^2 - 2\beta^2\gamma^2 - 2\beta^2\gamma^2$  είναι τέλειο τετράγωνο.  
 Β) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:  $(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2$ .  
 Γ) Να αποδείξετε την ταυτότητα του De Moivre:  
 $\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + 2\alpha^2\beta^2 - 2\beta^2\gamma^2 - 2\beta^2\gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha - \beta + \gamma)(\alpha + \beta - \gamma)(\alpha - \beta - \gamma)$
- 12) Α) Να δείξετε την ταυτότητα του Euler :  
 $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha)$
- Β) Με την βοήθεια της παραπάνω ταυτότητας να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:  
 Α)  $\alpha^3 - \beta^3 + \gamma^3 + 3\alpha\beta\gamma$   
 Β)  $\alpha^3 - \beta^3 - \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma$   
 Γ)  $\alpha^3 + \beta^3 - 8 + 6\alpha\beta$   
 Δ)  $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha)$
- 13) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:  
 Α)  $3(\alpha - \beta) - (\alpha^2 - \beta^2)$ ,  
 Β)  $2\alpha\beta + 4\alpha - \beta - 2$ ,  
 Γ)  $\alpha^3 + 1$ ,  
 Δ)  $2\beta^2 - \beta + 2\beta\alpha - \alpha$ .

**( Εξιώσεις – Ανισώσεις )**

- 14) Να λύσετε τις εξισώσεις :
- Α)  $2x + 1 - 3(x - 4) = -x + 7$ ,  
 Β)  $3x - 11 + 5(x + 1) = 10x - 6$ ,  
 Γ)  $\frac{x-3}{4} - \frac{x+1}{3} = \frac{x-5}{12}$   
 Δ)  $(2x+3)^2 - 7x + 12 = 4x^2 + 3x - 7$
- 15) Να λύσετε τις εξισώσεις :
- Α)  $x^2 - 4x = 0$ ,

B)  $3x^2 = 4x$ ,

Γ)  $2x^2 + x - 15 = 0$ ,

Δ)  $5x^2 - 18x - 8 = 0$

16) Δίνεται η εξίσωση  $(\lambda^2 - 3\lambda + 2)x^2 + (\lambda - 2)x + 3 = 0$ . Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός  $\lambda$  ώστε η παραπάνω εξίσωση:

A) να έχει μία μόνο ρίζα ,

B) να έχει διπλή ρίζα.

17) Η πλευρά ενός τετραγώνου είναι 4 cm μεγαλύτερη από την πλευρά ενός άλλου τετραγώνου. Βρείτε τις πλευρές τους αν γνωρίζουμε ότι η διαφορά των εμβαδών τους είναι  $88 \text{ cm}^2$ .

18) Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι  $25 \text{ cm}^2$ . Πότε το ορθογώνιο έχει την ελάχιστη περίμετρο και ποια είναι αυτή;

19) Να λύσετε τις εξισώσεις :

A)  $\frac{4x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1} = \frac{x}{x-1} + \frac{1}{x+1}$

B)  $\frac{x}{5-x} + \frac{x^2 + 25}{x^2 - 25} = \frac{5}{-x-5}$

Γ)  $\frac{z-2}{2z} = \frac{2}{2-z} + \frac{4}{z^2 - 2z}$

Δ)  $\frac{2}{2x+1} + \frac{4}{4x^2 - 1} = \frac{1}{2x-1}$

E)  $\frac{y}{y-2} - \frac{1}{y+5} = \frac{14}{y^2 + 3y - 10}$

20) Να λύσετε τις ανισώσεις :

A)  $\frac{2x-1}{3} - \frac{3x-5}{6} \leq \frac{x+2}{3}$

B)  $\frac{3x+1}{4} > 1 + \frac{4-x}{3}$

Γ)  $\frac{2(x-3)}{5} + (5-x) \leq \frac{5x-6}{10}$

21) Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων :

$$x - \frac{x-1}{3} - \frac{1}{12} \leq \frac{x-2}{4} - \frac{x-3}{12} \text{ και } \frac{7(x-3)}{3} - 2(x-5) > x$$

( Συστήματα γραμμικών εξισώσεων )

- 22) Δίνεται η ευθεία  $(\varepsilon) : \left(\frac{\alpha-1}{2}\right)x + (8-a)y = 6$ , που διέρχεται από το σημείο  $M(-3,4)$ .
- A) Να αποδείξετε ότι  $\alpha=5$ .
- B) Να βρείτε τα σημεία A και B που η ευθεία τέμνει τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$  αντίστοιχα.
- Γ) Να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου AOB όπου  $O(0,0)$ .
- 23) Δίνεται η εξίσωση  $x + 2y = 7$ .
- A) Να δείξετε ότι το ζεύγος  $(-1,4)$  είναι λύση της εξίσωσης.
- B) Για  $x = 5$  να βρείτε  $y$  ώστε το ζεύγος  $(5, y)$  να είναι λύση της εξίσωσης.
- Γ) Να γίνει η γραφική παράσταση της εξίσωσης  $x + 2y = 7$ .
- 24) Να λυθούν τα συστήματα :
- A) 
$$\begin{cases} x-2=0 \\ 2x-3y+7=0 \end{cases}$$
- B) 
$$\begin{cases} x+y=12 \\ x-y=4 \end{cases}$$
- Γ) 
$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 0 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{7} = 0 \end{cases}$$

( Συναρτήσεις )

- 25) Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = x^2 - 3x + 2$ . Να βρείτε :
- A) το πεδίο ορισμού της
- B) για ποιες τιμές του  $x$  που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της έχουμε  $f(x) = 0$ .
- Γ) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $g(x) = \frac{2x}{x^2 - 3x + 2}$ .
- 26) Να βρείτε την τιμή του  $\lambda$ , ώστε η παραβολή  $y = (\lambda - 3)x^2$  να διέρχεται από το σημείο  $M(1,2)$
- 27) Δίνεται η συνάρτηση  $y = x^2 + 3x + \mu$ .
- A) Για ποια τιμή του πραγματικού αριθμού  $\mu$  το σημείο  $A(2,4)$  ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης ;
- B) Αν  $\mu = -6$ , να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για  $-3 \leq x \leq 2$  και να βρείτε τα κοινά της σημεία με τους άξονες.

- 28) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής, που έχει κορυφή το σημείο  $K(2,-3)$  και τέμνει τον άξονα  $y'y$  στο σημείο  $A(0,5)$ .

**( Γεωμετρία )**

- 29) Σε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) έχουμε  $\hat{B} = 38^\circ$ . Να υπολογίσετε την τρίτη γωνία  $\hat{\Gamma}$  και τις εξωτερικές γωνίες του τριγώνου.
- 30) Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  φέρουμε τις  $B\Delta$ ,  $\Gamma Z$  διχοτόμους των γωνιών  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$  αντίστοιχα, που τέμνονται στο σημείο  $E$ . Να αποδείξετε ότι :  $\hat{BEG} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$
- 31) Σε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB=AG$ ), θεωρούμε στην πλευρά  $AB$  σημείο  $\Delta$  ώστε  $A\Delta = \frac{1}{3}AB$  και στην πλευρά  $AG$  σημείο  $E$  ώστε  $AE = \frac{1}{3}AG$ . Αν  $M$  το μέσο της βάσης  $B\Gamma$ , να δείξετε ότι το τρίγωνο  $\Delta ME$  είναι ισοσκελές.
- 32) Σε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) να φέρετε τη διχοτόμο  $B\Delta$ . Αν  $\Delta E \perp B\Gamma$ , να αποδείξετε ότι  $AB=BE$ .

**(Τριγωνομετρία)**

- 33) Να βρείτε τα πρόσημα των τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών :

$$82^\circ, 61^\circ, 130^\circ, 91^\circ, 178^\circ, 52^\circ.$$

- 34) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης  $A = \eta\mu^2 120^\circ + \epsilon\phi 135^\circ - \sigma\upsilon\nu^2 150^\circ$ .
- 35) Αν για την γωνία  $\omega$  με  $90^\circ < \omega < 180^\circ$  ισχύει  $\epsilon\phi\omega = \frac{8}{15}$ , τότε να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $\omega$ .
- 36) Να αποδείξετε τις σχέσεις :
- A)  $\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x \cdot \epsilon\phi x = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x$
- B)  $\frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} \cdot \epsilon\phi\omega = 1$
- 37) A) Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις  $A = \frac{\eta\mu^2\omega}{1 - \sigma\upsilon\nu\omega}$  και  $B = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{1 - \eta\mu\omega}$ .
- B) Να αποδείξετε ότι :  $A^2 + B^2 = 3 + 2(\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega)$ .